ACTES DE LA V TROBADA D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA
(BARCELONA, SCHCT, 2000), 439-443

GÉRMENES DE INVARIANCIA ADIABÁTICA: EHRENFEST (1911)

Luis Navarro Veguillas; Enric Pérez Canals
Departament de Física Fonamental. Universitat de Barcelona

Palabras clave: *cuerpo negro, invariantes adiabáticos, reglas de cuantización, función peso, Wien, Planck, Einstein, Ehrenfest.*

Germs of adiabatic invariance: Ehrenfest (1911)

Summary: *We analyse Ehrenfest's 1911 paper on the features which were really essential for the quantum hypothesis introduced by Planck in 1900. It is shown that although not explicitly, this paper contains some aspects which anticipate part of the strong relationship existing between adiabatic invariants and quantum rules.*

Key words: *black body, adiabatic invariants, quantum rules, weight function, Wien, Planck, Einstein, Ehrenfest.*

1. Introducción

El tratamiento de la radiación del cuerpo negro hecho por Planck –en 1900– incorporaba, en mayor o menor medida, elementos de la mecánica clásica, del electromagnetismo maxwelliano, de la teoría cinética de Boltzmann y una nueva –y oscura– discontinuidad en el comportamiento de los osciladores cargados eléctricamente. Forzoso era analizar la coherencia de tan heterogéneo conglomerado, pues no se podía descartar de antemano que la hipótesis cuántica fuera simplemente un artilugio ingenioso para obtener la ley de la radiación en equilibrio, y no una condición imprescindible para lograrlo; en este caso cabía la posibilidad de buscar alternativas que permitieran deducir la ley de Planck sin recurrir a tan exótica hipótesis.

Ehrenfest publicó en 1911 un hoy famoso artículo en el que demostraba rigurosamente la necesidad de aquella hipótesis cuántica (Ehrenfest, 1911). Unos meses después –de forma completamente independiente– Poincaré llegó a la misma conclusión (Poincaré, 1912). Pero no es este importante resultado del trabajo de Ehrenfest lo que aquí más nos interesa resaltar, sino algo que guarda estrecha relación con el tratamiento empleado: la aparición en ese artículo de Ehrenfest de un primer enunciado del principio adiabático o, al menos, de los primeros gérmenes de conexión entre invariancia adiabática y teoría cuántica, idea ésta que tan relevante papel había de jugar en el posterior desarrollo de la comúnmente conocida como *the old quantum theory.*

2. Acerca del contenido del artículo de Ehrenfest, de 1911

Comienza suponiendo válida la ley del desplazamiento de Wien, que Ehrenfest escribe en la forma:

$$\rho(\nu,T)d\nu = \alpha\,\nu^3 f\left(\beta\frac{\nu}{T}\right)d\,\nu \qquad (1)$$

Además, para «muy grandes longitudes de onda» es válida la ley de Rayleigh-Jeans, mientras que para «cortas longitudes de onda» se ha de evitar en todo candidato a ley de radiación lo que Ehrenfest bautizó aquí como «catástrofe de Rayleigh-Jeans en el ultravioleta».

A continuación, Ehrenfest expone los recursos teóricos –¡todos clásicos!, por supuesto– que va a utilizar en su tratamiento. Así anticipa que, en lugar de operar con los resonadores planckianos, seguirá el método introducido por Rayleigh y Jeans al considerar los modos normales de las oscilaciones electromagnéticas en la cavidad que contiene la radiación. También adopta un resultado teórico anteriormente publicado (Ehrenfest cita aquí a Lord Rayleigh, 1902) que guarda estrecha relación con el objetivo de nuestro trabajo. Si con lentitud infinita se contraen las paredes de una cavidad cúbica, la energía asociada a cada oscilación propia crece –a costa del trabajo efectuado en la compresión para vencer la presión de radiación– en proporción directa con la frecuencia:

$$\frac{E_{\nu^I}}{\nu^I} = \frac{E_\nu}{\nu} \qquad (2)$$

Para determinar cómo se distribuye la energía entre los modos de oscilación, Ehrenfest anticipa que va a seguir el método de Boltzmann para distribuir la energía entre las moléculas de un gas ideal: maximizará la entropía del sistema y obtendrá así «la distribución más probable». En los planteamientos de Boltzmann no hay, en principio, ninguna restricción para los valores de la energía de una molécula y se parte del supuesto de equiprobabilidad en la hipersuperficie de energía constante, en el espacio de las fases, para regiones de igual volumen, o lo que es equivalente: todos los estados de una molécula, caracterizados por sus coordenadas y momentos generalizados, son igualmente probables *a priori*, si son compatibles con la energía total del sistema.

Pero la hipótesis anterior –una manifestación de la llamada hipótesis ergódica– no es un resultado que se deduzca de las leyes del movimiento; no pasa de ser una suposición plausible y sencilla, pero no por ello absolutamente necesaria, por lo que puede ser sometida a crítica en su aplicación a los modos de vibración. El estado de una oscilación propia de frecuencia ν queda caracterizado por su energía y su fase. Ehrenfest considera, como es usual, que la fase es independiente de ν y totalmente aleatoria; no así su energía, por lo que introduce la «función peso» («Gewichtsfunktion») $\gamma(\nu,E)$ definida por la propiedad de que $\gamma(\nu,E)dE$ representa la probabilidad de que, *a priori*, una oscilación de frecuencia ν tenga una energía comprendida entre E y $E + dE$. Ehrenfest consigue demostrar que, salvo un factor –irrelevante– que puede depender de la frecuencia, la función peso lo es de una única variable:

$$\gamma(\nu, E) = Q(\nu) \cdot G\left(\frac{E}{\nu}\right) \tag{3}$$

Tras introducir la nueva variable $q \cong E/\nu$, Ehrenfest dedica prácticamente el resto del artículo al análisis de las propiedades de la función $G(q)$ y a sus implicaciones físicas. Para preservar el formalismo de la posible existencia de singularidades en la función peso, asociadas a valores discretos de la energía, Ehrenfest admite un posible «recorrido puntual» («Punktbelegung») adicional; lo caracteriza por la asignación a ciertos puntos q_0, q_1, q_2, etc., de los respectivos pesos finitos G_0, G_1, G_2, etc. Añadiendo esta posibilidad al usual «recorrido continuo» («Streckenbelegung») determinado por la función $G(q)$, llega a obtener la ecuación funcional cuya solución es, precisamente, la función peso:

$$\sum_{r=0}^{\infty} G_r \cdot e^{-q_r \sigma} + \int_{0}^{\infty} dq \cdot G(q) \cdot e^{-q\sigma} = e^{-\int C \cdot f(\sigma) \cdot d\sigma} \tag{4}$$

donde σ es el argumento de la f de la ley del desplazamiento de Wien (1).

Ehrenfest afirma que, para ilustrar el método, va a deducir los pesos correspondientes a las fórmulas de Planck y de Wien, indicando que la solución de (4) se la debe a un comentario de cierto amigo no especificado: se verifica que $G(q) = 0$, y que los pesos particulares no nulos ocurren en los puntos $q_r = 0, 1, 2$, etc. Si se recurre a la pista proporcionada por «el amigo de Ehrenfest», ciertamente la solución de la ecuación (4), tanto en el caso de Planck como en el de Wien, es muy sencilla. En efecto, dado que en ambos casos es fácil comprobar que el segundo miembro es de la forma

$$e^{-\int C \cdot f(\sigma) d\sigma} = F\left(e^{-\sigma}\right) \tag{5}$$

la ecuación funcional (4) se puede reescribir como

$$\sum_{r=0}^{\infty} G_r \cdot \left(e^{-\sigma}\right)^r = F\left(e^{-\sigma}\right) \tag{6}$$

Así los pesos particulares G_r surgen directamente al desarrollar F en serie de potencias de $e^{-\sigma}$, en cada caso. Un sencillo cálculo permite obtener de esta forma tanto los pesos particulares de Wien, como los de Planck. Es así como queda justificada la necesidad del *quantum* de radiación por Ehrenfest en 1911.

Una aclaración complementaria. Para resolver la ecuación funcional (4) hoy no existe dificultad especial en los casos que nos ocupan: se trata simplemente de deducir la «descomposición espectral» de la función que figura en el miembro de la derecha, tras sustituir $f(\sigma)$ por sus correspondientes expresiones para el caso de Wien y de Planck, respectivamente (ROSENFELD, 1936: 229). Pero en aquellos tiempos las dificultades eran obviamente mayores.

3. Invariantes adiabáticos y reglas de cuantización

Para llegar a las conclusiones del trabajo de Ehrenfest de 1911 se requiere, una vez introducida la función peso (ν,E), la factorización (3): ello implica que dicha función lo es realmente de una única variable $G(q)$, salvo un factor irrelevante. Para demostrar (3) Ehrenfest hace uso del resultado (2) –de Lord Rayleigh– que expresa el carácter de invariante adiabático de $q \cong E/\nu$, pues esta magnitud permanece constante en toda modificación adiabática de la cavidad que contiene a la radiación.

Dado que el espectro de $G(q)$ determina la cuantización de la energía, y que dicho espectro resulta invariante en una transformación adiabática, aparece aquí un ejemplo –pensamos que realmente el primer ejemplo– de relación entre invariancia adiabática y cuantización de la energía. Por supuesto que esta relación no aparece expresamente señalada en el trabajo que estamos comentando. No obstante pensamos que el artículo contiene los gérmenes de las generalizaciones que Ehrenfest había de presentar durante el lustro siguiente. Veamos algo de ello.

El enunciado bautizado por Einstein, en 1914, como «hipótesis adiabática de Ehrenfest», reza así (EHRENFEST, 1916: 577): «Si un sistema está expuesto a influencias adiabáticas, los movimientos permitidos se transforman en movimientos permitidos». Según *the old quantum theory,* los únicos movimientos permitidos son los que obedecen a las llamadas *reglas de cuantización*, por lo que la anterior hipótesis implica que dichas reglas han de ser invariantes en una transformación adiabática. O lo que es equivalente: las reglas de cuantización han de enunciarse en términos de magnitudes físicas que representen invariantes adiabáticos. Resulta como corolario que si, en virtud de ciertas reglas de cuantización, se caracteriza el estado de un sistema por sus números cuánticos, el estado del sistema –es decir, los números cuánticos que lo representan– no varía en una transformación adiabática.

Ciertamente, estas consideraciones nuestras, tal como están expresadas en el párrafo anterior, no tenían sentido aún en 1911. De hecho sólo lo tendrían unos años después, una vez resueltos algunos de los problemas asociados con las coordenadas adecuadas para aplicar correctamente las reglas de cuantización establecidas por Debye, Planck, Wilson, Ishiwara y Sommerfeld, entre 1914 y 1916 (JAMMER, 1966: 90-96). Pero, volviendo al trabajo de Ehrenfest de 1911, podemos encontrar todas esas consideraciones –aunque casi nunca en forma explícita– referidas a un caso particular: el del invariante adiabático q y el de la regla de cuantización de Planck.

En efecto, de (2) se deduce la invariancia adiabática de q, que no sólo resulta imprescindible para obtener las conclusiones del trabajo sino que, al implicar a su vez la invariancia de los puntos , conduce también a la invariancia adiabática de la regla de cuantización de Planck que, en esta notación y con unidades adecuadas, se escribe simplemente como . Además cada uno de estos puntos representa un estado energético de un modo normal de vibración correspondiente a la frecuencia ν : aquél en el cual la energía del modo vale precisamente $E = rh\nu$. Tras una transformación adiabática, este modo cambia su frecuencia y su energía, de forma que ahora, en principio, se verificará $E' = r'h\nu'$. Pero en virtud de la invariancia adiabática expresada en (3) se ha de cumplir $r' = r$. Ello significa que en la transformación adiabática no ha variado el estado del modo si, como hemos indicado, dicho estado se representa por el número cuántico r.

En resumen, creemos haber justificado suficientemente que en este trabajo de Ehrenfest de 1911 ya están presentes, aunque en forma latente, buena parte de las ideas que habrían de desarrollarse posteriormente acerca de la relación entre invariantes adiabáticos y reglas de cuantización. Aparecen en el estudio de las energías de los modos normales de vibración correspondientes a una frecuencia dada v: en este caso el invariante adiabático q es el protagonista de la historia que lleva a Ehrenfest hasta la cuantización de Planck y de Einstein. Estas ideas fueron refinadas, generalizadas y también aplicadas poco después por el mismo Ehrenfest (entre otros(al desarrollo de la teoría cuántica (KLEIN, 1970: 264-292).

Se hace constar que parte de las investigaciones que han dado lugar a este trabajo han sido subvencionadas por la CICYT (PB 96-0169).

Bibliografía

EHRENFEST, P. (1911), «Welche Züge der Lichtquantenhypothese spielen in der Theorie der Wärmestrahlung eine wesentliche Rolle?», *Annalen der Physik*, *36*, 91-118.

EHRENFEST, P. (1916), «On adiabatic changes of a system in connection with the quantum theory», *Proceedings Amsterdam Academy*, *19*, 576-597.

JAMMER, M. (1966), *The conceptual development of quantum mechanics*, New York, McGraw Hill.

KLEIN, M. J. (1970), *Paul Ehrenfest. The making of a theoretical physicist*, Amsterdam, North-Holland.

LORD RAYLEIGH (1902), «On the pressure of vibrations», *Philosophical Magazine*, *3*, 338-346.

POINCARÉ, H. (1912), «Sur la théorie des quanta», *Journal de Physique*, *2*, 5-34.

ROSENFELD, L. (1936), «La première phase de l'évolution de la théorie des quanta», *Osiris*, *2*, 149-196. Versión inglesa en COHEN, R.S.; STACHEL, J. J. (eds.) (1979), *Selected Papers of Léon Rosenfeld* (Boston Studies in the Philosophy of Science, volumen XXI), Dordrecht, D. Reidel, 193-233. Las citas en nuestro texto se refieren a esta última versión.